PHYSIQUE

APPLICATION DES LOIS DE NEWTON

I) Chute libre d'un solide dans champ de pesanteur uniforme :

Au voisinage de la Terre, le vecteur champ de pesanteur $\vec{g}$ en un point où se trouve une masse m (en kg) est défini par: $\vec{g}=\dfrac{\vec{P}}{m}$

- Direction : la verticale du lieu.
- Sens : du haut vers le bas;
- Valeur ou intensité de la pesanteur, g = 9,8 $N.kg^{-1}$ ou $m.s^{-2}$,

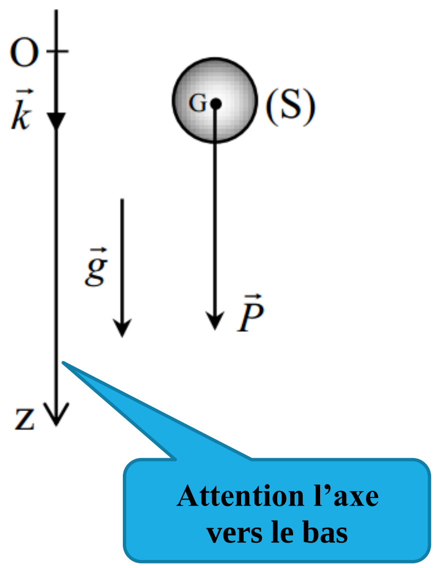
A la surface de la terre : $g_0=G\times\dfrac{M_T}{R_T^2}$

G : Constante de gravitation universelle : $G = 6{,}67\times10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$;
M_T : Masse de la terre.
R_T : Rayon de la terre.

Dans un champ de pesanteur uniforme, le vecteur champ de pesanteur a même direction, même sens et même valeur en tout point.

1) Chute libre verticale sans frottement.

Un solide est en chute libre lorsqu'il n'est soumis qu'à l'action de son poids.
On considère un solide (S) de masse m en chute libre.



➢ **Etude du mouvement du solide (S) :**

***Le système étudié* :** { Solide (S) }

***Le bilan des forces* :**

$\vec{P}$: Poids du système $\vec{P}=m\times\vec{g}=m\times g\times\vec{k}$

***La deuxième loi de newton* :**

$$\sum\vec{F}_{ext}=m\times\vec{a}_G\Rightarrow\vec{P}==m\times\vec{a}_G\Rightarrow\vec{g}=\vec{a}_G$$

par projection sur l'axe (OZ) : $g=a_G$ ou $g=\dfrac{dV_G}{dt}$

c'est l'équation différentielle du mouvement

Solution de l'équation différentielle :

$$V_G(t)=g.t+V_0$$

avec V_0 : la vitesse à l'instant t = 0.

L'équation horaire du mouvement :

$$z(t)=\frac{1}{2}g.t^2+V_0.t+z_0$$

avec z_0 : la position à l'instant t = 0.

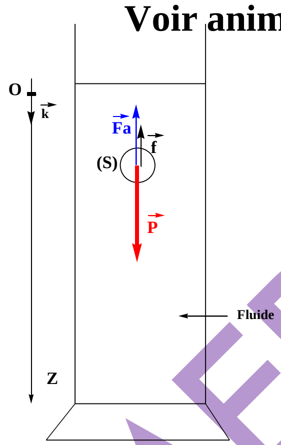
➢ **Nature du mouvement du solide (S) :**

La trajectoire est rectiligne et l'accélération est constante avec $\vec{g}.\vec{V}>0$ donc le mouvement est ***rectiligne uniformément accéléré***

PHYSIQUE

2) Chute verticale avec frottement.

Voir animation



Le système étudié : { Solide (S) }

Le bilan des forces :

$\vec{P}$: Poids du système $\vec{P} = m\times\vec{g} = m\times g\times\vec{k}$

$\vec{F}a$: Poussée d'Archimède $\vec{F}a = -\rho_F\times V\times g.\vec{k}$

$\vec{f}$: Force de frottement $\vec{f} = -K.\vec{V}_G^n$

La deuxième loi de newton :

$$\sum\vec{F}_{ext} = m\times\vec{a}_G \Rightarrow \vec{P} + \vec{F}a + \vec{f} = m\times\vec{a}_G$$

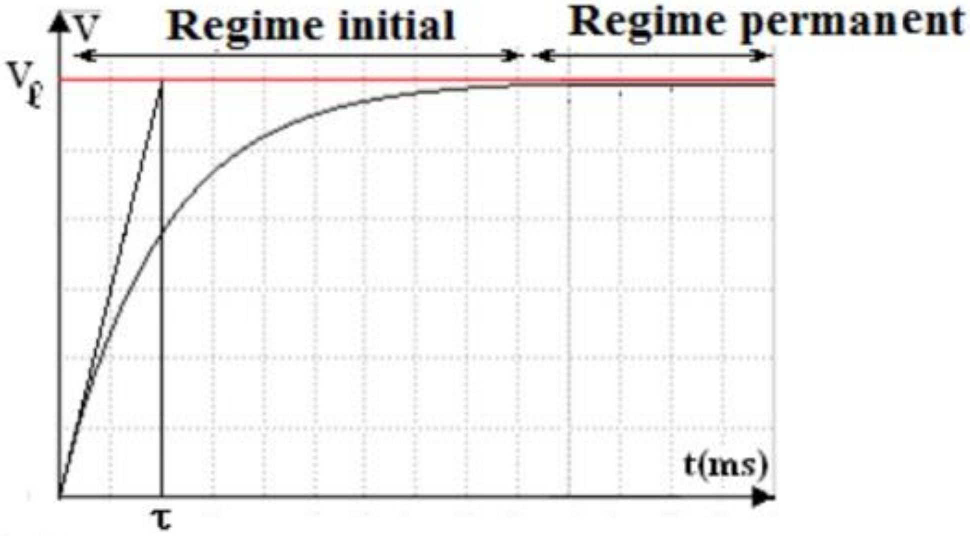
par projection sur l'axe (OZ) : $m\times g - \rho_F\times V\times g - K.V_G^n = m\times a_G$

$$[m - \rho_F\times V]\times g - K.V_G^n = m\times\frac{dV_G}{dt} \Rightarrow \frac{dV_G}{dt} = \left[\frac{m - \rho_F\times V}{m}\right]\times g - \frac{K}{m}.V_G^n$$

L'équation différentielle du mouvement s'écrit sous la forme

$$\frac{dV_G}{dt} = A - B\times V_G^n \qquad \text{avec } A = \left[1 - \frac{\rho_F}{\rho_S}\right]\times g \quad \text{et} \quad B = \frac{K}{m}$$

ρ_S : masse volumique du solide (S) et ρ_F : masse volumique du fluide.



Au cours d'une chute verticale avec frottement, le mouvement du centre d'inertie G du solide peut se décomposer en deux phases :

- **Le régime initial ou transitoire**, pendant lequel :
  - La vitesse V_G augmente.
  - La valeur f de la force de frottement fluide augmente
  - L'accélération a_G diminue.
- **Le régime asymptotique ou permanent**, pendant lequel
  - La vitesse V_G est égale à une vitesse constante V_ℓ.
  - La valeur f de la force de frottement fluide est constante
  - L'accélération a_G est nulle.

La recherche de A et de B : $\frac{dV_G}{dt} = A - B\times V_G^n$ avec $A = \left[1 - \frac{\rho_F}{\rho_S}\right]\times g$ et $B = \frac{K}{m}$

- **<u>Le régime initial :</u>** $V_G = 0$ donc $\frac{dV_G}{dt} = A = a_0$

Donc A égale au coefficient directeur de la tangente à la courbe V(t) à l'instant t = 0.

- **<u>Le régime permanent :</u>** $V_G = V_L = cte$ donc $\frac{dV_G}{dt} = A - B.V_L^n = 0 \Rightarrow V_L = \sqrt[n]{\frac{A}{B}}$
- **<u>Graphiquement :</u>**
  A $t = \tau$, la tangente à la courbe V(t) à t = 0 et l'asymptote $V = V_L$ se croisent donc $V_L = a_0.t$; a_0 : le coefficient directeur de la tangente à la courbe V(t) à l'instant t = 0 alors $a_0 = A$

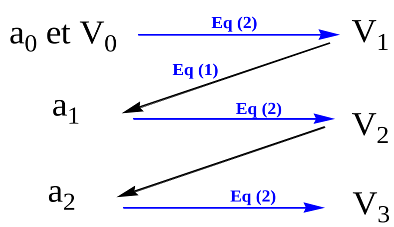
Solution de l'équation différentielle avec la méthode d'EULER:

- La méthode d'Euler est une méthode numérique itérative, **répété plusieurs fois**, qui permet d'évaluer, à intervalles de temps réguliers, différentes valeurs approchées à partir des conditions initiales.
- Il faut pour cela connaître :
  - L'équation différentielle du mouvement : $\frac{dV_G}{dt} = A - B\times V_G^n$
  - Les conditions initiales V_0.
  - Le pas de résolution Δt ; $\Delta t = t_{i+1} - t_i$.
- On peut déterminer les grandeurs cinétiques (vitesses et accélérations) par :
  - L'équation différentielle à l'instant t_i :

$$a_i = \frac{dV_G}{dt} = A - B\times V_i^n \quad (1)$$

  - L'expression de la vitesse d'un point M_i vers un autre M_{i+1} :

$$V_{i+1} = V_i + a_i \times t \quad (2)$$



Exercice d'application N°1 :

Chute d'une bille dans L'huile

Une bille de masse m = 4,0 g et de volume V = 1,0 cm³, lâchée sans vitesse initiale dans une éprouvette remplie d'huile, tombe verticalement. On admet qu'elle est soumise de la part du liquide à une force de frottement proportionnelle à la vitesse : $\vec{f} = -k.\vec{V}$

1) En appliquant la deuxième loi de Newton à la bille, établir l'équation différentielle du mouvement.
2) Mettre cette équation différentielle sous la forme $\frac{dV_Z}{dt} = A - B\times V_Z(t)$ et calculer les valeurs numériques des coefficients A et B.
3) Calculer la vitesse limite V_L atteinte par la bille.

PHYSIQUE

4) On souhaite résoudre cette équation différentielle par la méthode d'Euler. On choisit $\Delta t = 0{,}020$ s pour le pas de calcul. Calculer les deux premières valeurs non nulles de la vitesse.
Données : masse volumique de l'huile, $\rho = 0{,}90$ g. cm^{-3} ; intensité de la pesanteur, $g = 9{,}8$ N.kg^{-1}; $k = 3{,}8.10^{-2}$ kg.s^{-1}.

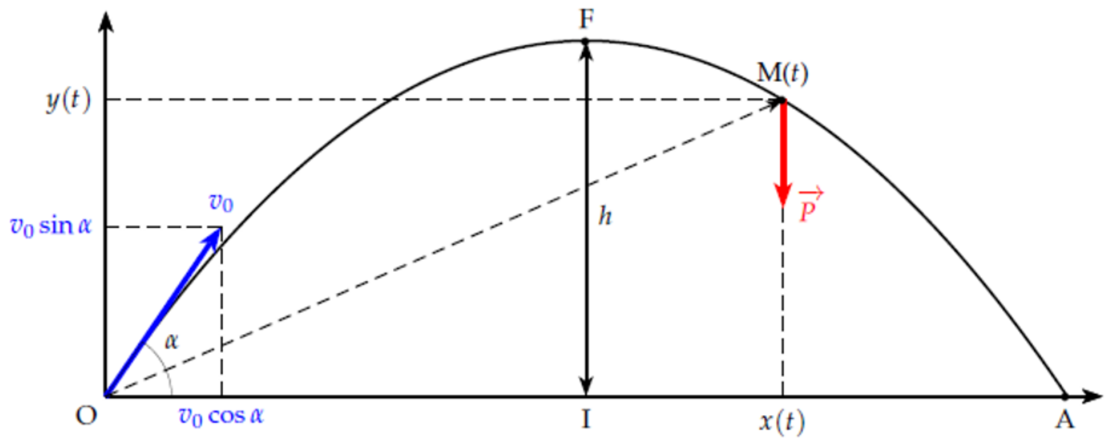
II) Mouvements plans :

1) Mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur uniforme.

1-1/ *Enoncé du problème :*

On lance un ballon de foot avec un angle α par rapport à l'horizontale avec une vitesse initiale V_0.

On peut alors faire le schéma suivant :



1-2/ *Equations horaires :*

Le référentiel terrestre peut être considéré comme galiléen car il correspondant aux conditions de laboratoire. On considère le repère OXY, plan correspondant au mouvement : (OX) correspondant à l'horizontale et (OY) à la verticale.

La seule force extérieure au système (le ballon de foot) est le poids. D'après le P.F.D « Principe Fondamentale de Dynamique », on a : $\vec{P} = m\times\vec{a} \Leftrightarrow m\times\vec{g} = m\times\vec{a} \Leftrightarrow \vec{g} = \vec{a}$.

On intègre deux fois le vecteur accélération, que l'on projette sur les deux axes, pour obtenir les équations horaires du système.

$$\vec{a}\begin{cases} a_X = 0 \\ a_Y = -g \end{cases} \Rightarrow \vec{V}\begin{cases} V_X = V_0.\cos(\alpha) \\ V_Y = -g.t + V_0.\sin(\alpha) \end{cases} \Rightarrow \vec{OM}\begin{cases} X_M = V_0.\cos(\alpha).t \\ Y_M = -\frac{1}{2}g.t^2 + V_0.\sin(\alpha).t \end{cases}$$

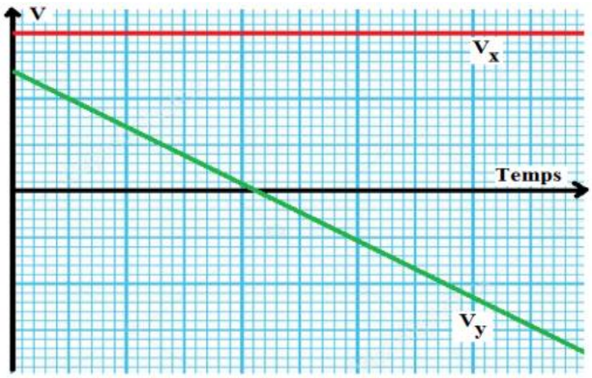
On obtient alors les équations horaires du mouvement :

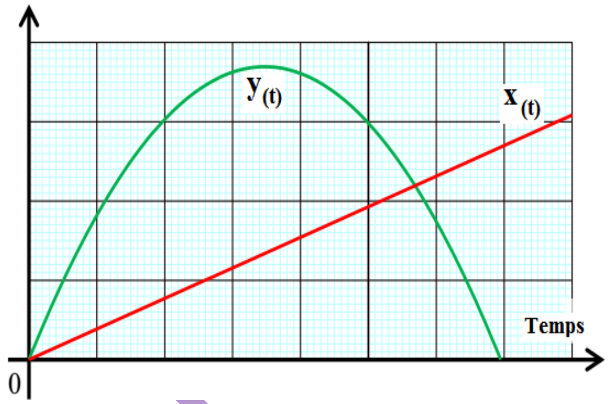
$$X(t) = V_0.\cos(\alpha).t \qquad (1)$$

$$Y(t) = -\frac{1}{2}g.t^2+V_0.\sin(\alpha).t \qquad (2)$$

Remarque

L'équation horaire de l'abscisse x(t) du projectile est une fonction linéaire et l'équation horaire de l'altitude y(t) du projectile est une fonction parabolique :





1-3/ Equation de la trajectoire :

Pour obtenir l'équation de la trajectoire, il faut isoler t dans l'équation horaire (1) puis le remplacer dans l'équation horaire (2) :

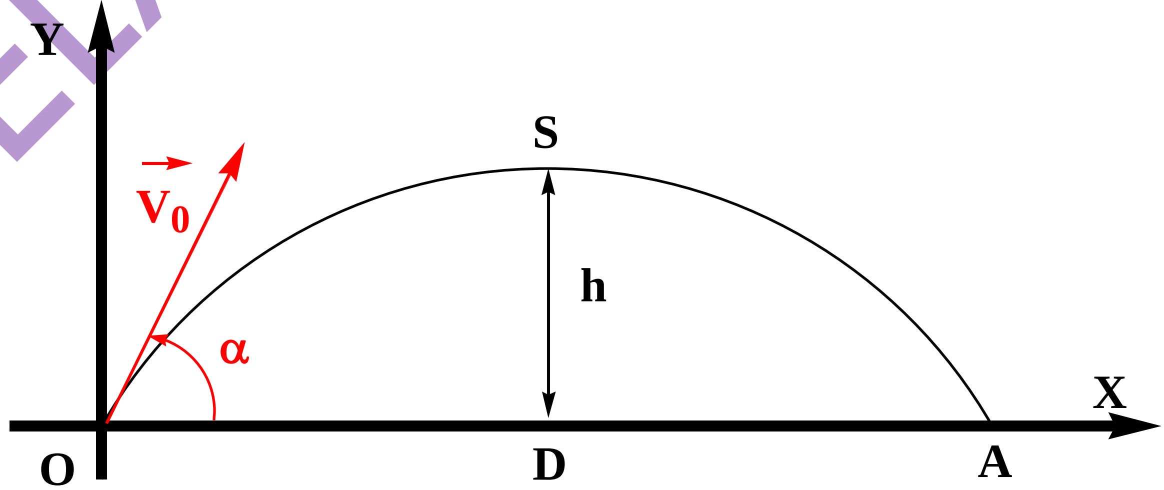
De (1) , on a : $t=\frac{x(t)}{V_0\times\cos(\alpha)}$

On remplace dans (2) : $y(t)=-\frac{1}{2}g\left[\frac{x(t)}{V_0\times\cos(\alpha)}\right]^2+V_0\times\sin(\alpha)\times\frac{x(t)}{V_0\times\cos(\alpha)}$

On obtient l'équation de la trajectoire suivante : $y(t)=-\frac{g}{2V_0^2\times\cos^2(\alpha)}x^2(t)+\tan(\alpha)\times x(t)$

1-4/ Calcule de la portée :

La trajectoire est donc une parabole concave. Pour déterminer la portée, il faut déterminer la distance OA, c'est à dire la distance x_A où le ballon retombe sur le sol soit pour y_A=0.



D'après l'équation de la trajectoire, on a :

$$-\frac{g}{2V_0^2\times\cos^2(\alpha)}x_A{}^2+\tan(\alpha)\times x_A=0\Leftrightarrow x_A\left[\tan(\alpha)-\frac{g}{2V_0^2\times\cos^2(\alpha)}\times x_A\right]=0$$

La solution x_A étant la solution non nulle, on a :

$$\tan(\alpha)-\frac{g}{2V_0^2\times\cos^2(\alpha)}\times x_A=0\Rightarrow x_A=\frac{2\tan(\alpha)\times V_0^2\times\cos^2(\alpha)}{g}=\frac{2\times V_0^2\sin(\alpha)\times\cos(\alpha)}{g}$$

Sachant que : $2\times\sin(\alpha)\times\cos(\alpha)=\sin(2\alpha)$ donc

$$OA=x_A=\frac{V_0^2\sin(2\alpha)}{g}$$

1-5/ *Calcule de la flèche : le sommet de la trajectoire:*

La flèche correspond à la hauteur maximale atteinte par le ballon : le sommet de la trajectoire.

Sur notre schéma ci-dessus, la flèche correspond à la hauteur $h = Y_S$ atteinte pour l'abscisse X_S.

a) Première méthode : symétrie de la parabole

D'après la symétrie de la parabole, on a : $OD=\frac{OA}{2}=\frac{V_0^2\sin(2\alpha)}{2g}$

On en déduit alors :

$$h=-\frac{g}{2V_0^2\times\cos^2(\alpha)}OD^2+\tan(\alpha)\times OD\Rightarrow h=-\frac{g}{2V_0^2\times\cos^2(\alpha)}\left[\frac{V_0^2\sin(2\alpha)}{2g}\right]^2+\tan(\alpha)\times\frac{V_0^2\sin(2\alpha)}{2g}$$

Apres simplification : $h=\frac{V_0^2\sin^2(\alpha)}{2g}$

b) Deuxième méthode : tangente horizontale

La flèche est obtenue lorsque la vitesse est horizontale soit quand Vy = 0

On alors : $-g\times t+V_0\times\sin(\alpha)=0\Rightarrow t=\frac{V_0\times\sin(\alpha)}{g}$

On remplace alors dans l'équation horaire de y(t), on obtient :

$$h=y(t)=-\frac{1}{2}g\left[\frac{V_0\times\sin(\alpha)}{g}\right]^2+V_0\times\sin(\alpha)\times\frac{V_0\times\sin(\alpha)}{g}\quad\Rightarrow\quad h=\frac{V_0^2\sin^2(\alpha)}{2g}$$