Quatrième Partie : La mécanique
Unité 3
8 H

Quelques applications des lois de Newton
(Les mouvements plans)

بسم الله الرحمن الرحيم
السلام عليكم ورحمة الله وبركاته

2^{éme} Bac Sciences Physique (PC / SM)

I – Mouvement d'un projectile dans un champ de pesanteur uniforme :

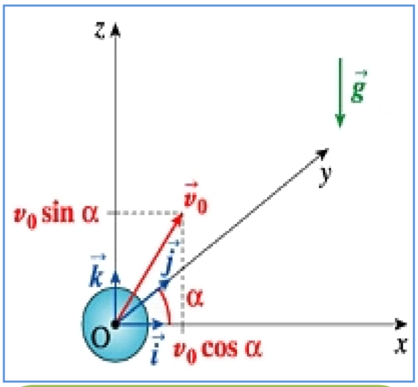
On appelle projectile chaque corps lancé au voisinage de la terre à une vitesse initiale $\vec{v}_0$. Pour simplifier l'étude, on néglige tous les frottements et on considère le projectile soumis à son poids uniquement (chute libre).

A un **instant** choisi comme **origine** des **dates**, on **lance**, d'un **point O**, un **corps solide** (S) de **masse m** avec une **vitesse initiale $\vec{v}_0$**, formant un **angle α** avec le **plan horizontal**.
On considère le **champ** de **pesanteur uniforme**.

1– Les équations différentielles :

Système étudié : {le **corps** (S) } .

L'inventaire des forces : son **poids** $\vec{P} = m\vec{g}$.



Le **mouvement** est étudié dans le **repère** $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ lié à la **terre** considérée comme **galiléen**.
En appliquant la **deuxième loi** de **Newton**, on trouve :

$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m\vec{g} = m.\vec{a}_G$ D'où $\vec{a}_G = \vec{g}$

La **projection** de cette **relation vectorielle** dans le **repère** $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ donne : $\vec{a}_G(t) \begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = 0 \\ a_z(t) = -g \end{cases}$ **les équations différentielles du mouvement**.

Lors de la chute libre d'un projectile à une vitesse initiale et non verticale, on a $\vec{a}_G = \vec{g}$

On déduit que la **direction** du **vecteur** d'**accélération** $\vec{a}_G$ est **verticale** et que son **sens** est vers le **bas** et sa **norme** est : $a_G = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = g$

2– Solution des équations différentielles :

Les conditions initiales à l'instant $t = 0$: $\overrightarrow{OG}_0 \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}$ et $\vec{v}_{G0} \begin{cases} v_{0\,x} = v_0 \cos \alpha \\ v_{0\,y} = 0 \\ v_{0\,z} = v_0 \sin \alpha \end{cases}$.

On sait que $\vec{a}_G = \frac{d\vec{v}}{dt}$ donc $\frac{d\vec{v}}{dt}(t) \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = a_x(t) = 0 \\ \frac{dv_y}{dt} = a_y(t) = 0 \\ \frac{dv_z}{dt} = a_z(t) = -g \end{cases}$ représente **les équations différentielles du mouvement**.

Par intégration on obtient :

$$\vec{v}_G(t)\begin{cases} v_x(t) = C_1 = v_{0\,x} = v_0 \cos\alpha \\ v_y(t) = C_2 = v_{0\,y} = 0 \\ v_z(t) = -g.t + C_3 = -g.t + v_{0\,z} = -g.t + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

représente **les équations horaires du vecteur vitesse**.

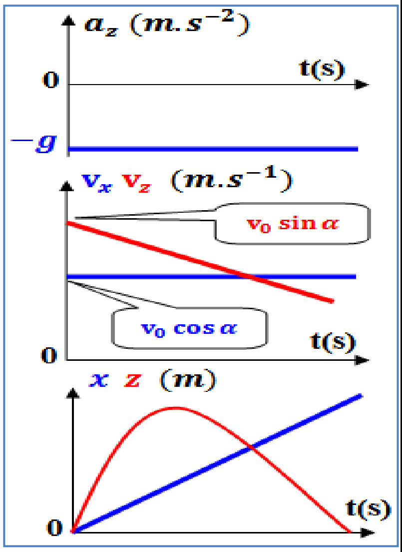
On sait que $\vec{v}_G(t) = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$ donc $\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}(t)\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x(t) = v_0 \cos\alpha \\ \frac{dy}{dt} = v_y(t) = 0 \\ \frac{dz}{dt} = v_z(t) = -g.t + v_0 \sin\alpha \end{cases}$

Par **intégration** on obtient :

$$\overrightarrow{OG}(t)\begin{cases} x(t) = (v_0 \cos\alpha)t + C_4 = (v_0\cos\alpha)t \\ y(t) = C_5 = y_0 = 0 \\ z(t) = -\frac{1}{2}g.t^2 + (v_0 \sin\alpha)t + C_6 = -\frac{1}{2}g.t^2 + (v_0\sin\alpha)t \end{cases}$$

représente **les équations horaires du vecteur position.**

- **Puisque $y(t) = 0$ donc le mouvement est plan et il a lieu dans le plan verticale (G, $\vec{v}_0$,$\vec{g}$).**
- **$x(t)$ est une fonction linéaire, donc, sur l'axe (O,$\vec{i}$) le mouvement est rectiligne et uniforme.**
- **$z(t)$ est une fonction de deuxième ordre, donc, sur l'axe (O,$\vec{k}$) le mouvement est uniformément varié.**



3– Trajectoire du centre d'inertie :

3-1- Equation de la trajectoire :

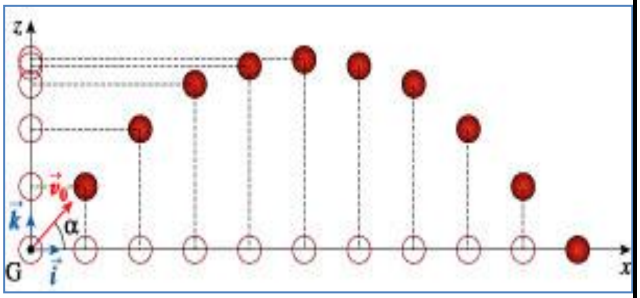
Pour obtenir l'équation de la trajectoire, l'expression z doit être trouvée en fonction de x en éliminant le temps.

On a $x(t) = (v_0 \cos\alpha)t$ d'où $t = \frac{x(t)}{v_0\cos\alpha}$.

On remplace par son **expression** dans l'**équation horaire** z et on trouve :

$$z(x) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + (v_0\sin\alpha)\frac{x}{v_0\cos\alpha}$$

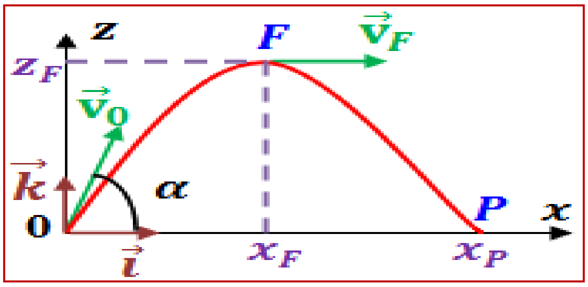
Donc $z(x) = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x$.



$z(t)$ Est une fonction de deuxième ordre, càd sa représentation graphique est une parabole appartient au plan du tir. Donc, le mouvement est parabolique.

3-2- Le sommet ou La flèche :

La flèche F est l'altitude maximale atteinte par le centre d'inertie du projectile.



Au **point F** , le **vecteur vitesse** $\vec{v}_F$ est **horizontal**, alors $v_z = \frac{dz}{dt} = 0$.

D'où $-t_F + v_0 \sin\alpha = 0$ donc $t_F = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$.

$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$

On trouve donc les **coordonnées** de **F** sont : $x_F = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$ et $z_F = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$.

Remarque : On obtient la **valeur maximale** pour la **flèche** si le **projectile** est lancé **verticalement** vers le **haut** (c-à-d $\alpha = \frac{\pi}{2}$) .

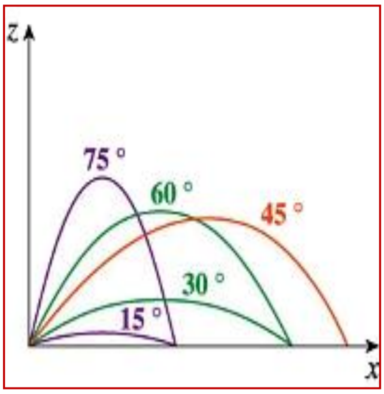
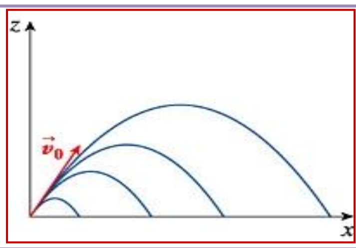
3-3- La Portée :

La portée est la distance entre la position G_0 du centre d'inertie du projectile à l'instant du lancement et la position P du point G lors de la chute du projectile tel que P appartient à l'axe horizontal qui passe par G_0.

On a $z_P = 0$ d'où $\left(-\frac{g}{2{V_0}^2\cos\alpha^2}x_P + \tan\alpha\right)x_P = 0$ donc les **solutions** de cette **équation** sont : $x_P = 0$ ou $x_P = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ (on remarque que $x_P = 2x_F$).

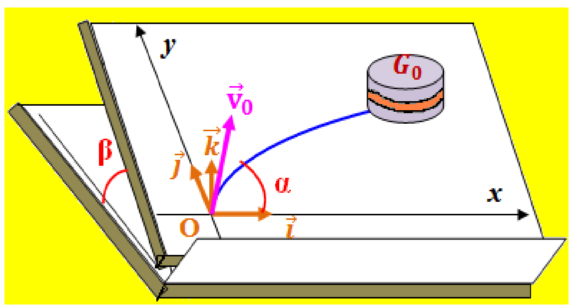
Pour une **valeur donnée** de v_0 , la **portée** est **maximale** lorsque $\sin 2\alpha = 0$ (c-à-d $\alpha = 45°$) et dans **ce cas** : $x_{P_{max}} = \frac{{v_0}^2}{g}$.

Remarque : à partir de **deux relations** : $z_F = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$ et $x_P = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$, on a :

	Les remarques	La courbe
Pour une valeur constante de la Vitesse initiale v_0	■ **La portée croît lorsque α croît entre $[0°; 45°[$** ■ **La portée décroît lorsque α croît entre $]45°; 90°]$** ■ **La portée prend la valeur maximale lorsque $\alpha = 45°$** ■ **La portée a même valeur pour deux angles complémentaires $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$** ■ **La cote de la flèche z_F croît lorsque α croît**	
Pour une valeur constante de l'angle de tir α	**La portée et la cote de la flèche croissant lorsque la valeur de la vitesse initiale v_0 croît.**	

II – Mouvement d'un corps solide sur un plan incliné :

A un **instant** choisi comme **origine** des **dates**, on lance un **autoporteur** de **masse** m sur une **table** à **coussin d'air incliné** d'un **angle** β par rapport à l'**horizontale** avec une **vitesse initiale** forme un **angle** α avec le **bord inférieur** de la **table**. On **néglige** tous les **frottements**.



1– Les équations différentielles :

Système étudié : {l'**autoporteur**} .

L'inventaire des forces : son **poids** $\vec{P}$, la **réaction** de la **table** $\vec{R}$.

Le **mouvement** est étudié dans le **repère** $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ lié à la **terre** considérée comme **galiléen**.

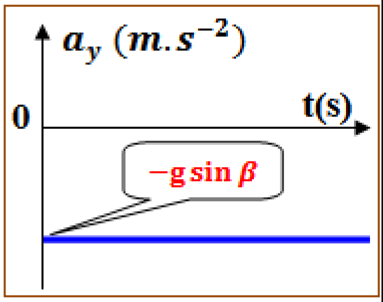
En appliquant la **deuxième loi** de **Newton**, on trouve : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R} = m.\vec{a}_G$

Dans le repère $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on a $\vec{P}\begin{cases} P_x = 0 \\ P_y = -mg\sin\beta \\ P_z = -mg\cos\beta \end{cases}$ et $\vec{R}\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ R_z = R_N \end{cases}$.

$\vec{a}_G(t)\begin{cases} a_x(t) \\ a_y(t) = 0 \\ a_z(t) = 0 \end{cases}$ ($a_z = 0$ le **mouvement** de l'**autoporteur** se fait dans le **plan** (Oxy)).

En projetant la **relation vectorielle** dans le **repère** $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on trouve :

$\begin{cases} P_x + R_x = m.a_x \\ P_y + R_y = m.a_y \\ P_z + R_z = m.a_z \end{cases}$ d'où $\begin{cases} m.a_x = 0 \\ m.a_y = -m.g\sin\beta \\ m.a_z = R_N - m.g\cos\beta = 0 \end{cases}$



Alors **les équations différentielles du mouvement** sont :

$$\vec{a}_G(t)\begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = -g\sin\beta \\ a_z(t) = 0 \end{cases}$$

L'**accélération** est **constante** : $a_G = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = |a_y| = g\sin\beta = cte$.

2– Solution des équations différentielles :

Les conditions initiales à l'instant $t = 0$: $\overrightarrow{OG}_0\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}$ **et** $\vec{v}_{G0}\begin{cases} v_{0x} = v_0\cos\alpha \\ v_{0y} = v_0\sin\alpha \\ v_{0z} = 0 \end{cases}$.

On sait que $\vec{a}_G = \frac{d\vec{v}}{dt}$ donc $\frac{d\vec{v}}{dt}(t)\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = a_x(t) = 0 \\ \frac{dv_y}{dt} = a_y(t) = -g\sin\beta \\ \frac{dv_z}{dt} = a_z(t) = 0 \end{cases}$ représente **les** **équations différentielles du mouvement**.

Par intégration on obtient :

$$\vec{v}_G(t)\begin{cases} v_x(t) = C_1 = v_{0x} = v_0\cos\alpha \\ v_y(t) = -(g\sin\beta)t + C_2 = -(g\sin\beta)t + v_0\sin\alpha \\ v_z(t) = C_3 = v_{0z} = 0 \end{cases}$$

représente **les** **équations horaires du vecteur vitesse**.

On sait que $\vec{v}_G(t) = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$ donc $\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}(t)\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x(t) = v_0\cos\alpha \\ \frac{dy}{dt} = v_y(t) = -(g\sin\beta)t + v_0\sin\alpha \\ \frac{dz}{dt} = v_z(t) = 0 \end{cases}$

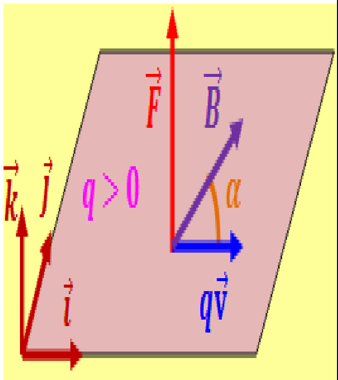
Par **intégration** on obtient : $\overrightarrow{OG}(t)\begin{cases} x(t) = (v_0\cos\alpha)t + C_4 = (v_0\cos\alpha)t \\ y(t) = -\frac{1}{2}(g\sin\beta)t^2 + (v_0\sin\alpha)t \\ z(t) = C_6 = z_0 = 0 \end{cases}$

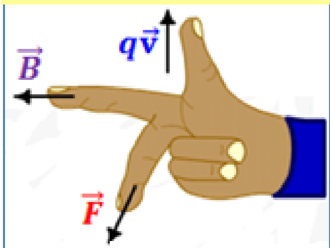
représente **les équations horaires du vecteur position.**

- **Puisque $z(t) = 0$ donc le mouvement est plan et il a lieu dans le plan incliné (O, $\vec{i}$,$\vec{j}$).**
- **$x(t)$ est une fonction linéaire, donc, sur l'axe (O,$\vec{i}$) le mouvement est rectiligne et uniforme.**
- **$y(t)$ est une fonction de deuxième ordre, donc, sur l'axe (O,$\vec{j}$) le mouvement est uniformément varié.**
- **L'équation de la trajectoire :** $y(x) = -\frac{g\sin\beta}{2\,v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x$

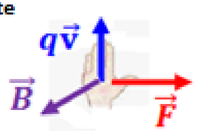
III – Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme :

1– La force magnétique :





Règle des trois doigts de la main droite



Règle de la main droite

- **Relation de Lorentz :**

Une particule chargée, d'une charge q se déplace avec une vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique de vecteur $\vec{B}$ subit une force magnétique $\vec{F}$ appelée force de Lorentz donnée par la relation vectorielle : $\vec{F} = q.\vec{v}\wedge\vec{B}$.

- **Caractéristiques de la force magnétique :**

Point d'application: la particule elle-même (considérée comme point).

Ligne d'action : la perpendiculaire à $\vec{v}$ et $\vec{B}$ c-à-d la perpendiculaire au plan ($\vec{v}$, $\vec{B}$).

Sens : est tel que la trièdre (q$\vec{v}$, $\vec{B}$, $\vec{F}$) soit directe.

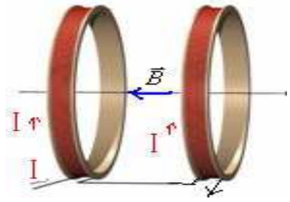
L'intensité : $F = |q.v.B.\sin\alpha|$ avec $\alpha = \left(\widehat{\vec{v},\vec{B}}\right)$.

Remarque :

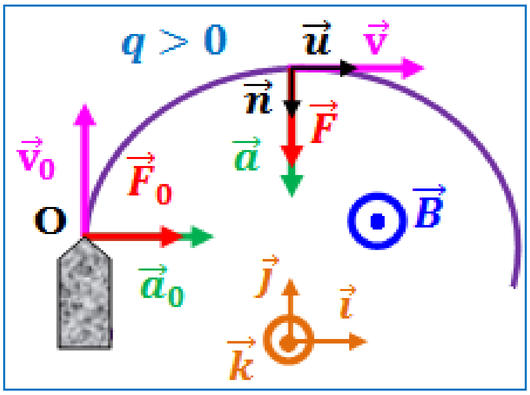
- Si $v = 0$ donc $F = 0$ c-à-d **le champ magnétique n'a pas un effet sur une particule en repos.**
- Si $\vec{v}\parallel\vec{B}$ c-à-d ils ont la **même direction** ($\alpha = 0$ ou $= \pi$) donc $F = 0$.
- Si $\vec{v}\perp\vec{B}$ d'où $\alpha = \frac{\pi}{2}$ alors $F = |q|vB$.
- **La force de Lorentz a une puissance nulle** $P = \vec{F}.\vec{v} = 0$ car elle **reste toujours perpendiculaire à** $\vec{v}$ lors du **mouvement** de la **particule** dans un **champ magnétique uniforme**.
- Si la **particule chargée** est soumise à **la force de Lorentz uniquement** lors de son **mouvement** dans un **champ magnétique uniforme**, donc **sa puissance est nulle** d'où $P = \frac{dE_C}{dt} = 0$ alors **son énergie cinétique se conserve** c-à-d $E_C = cte$ alors **son mouvement est uniforme**.

2– Etude du mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme :

Un champ magnétique est uniforme, si le vecteur $\vec{B}$ maintient, à chaque point, la même direction, et le même sens, et la même norme.



A un **instant** choisi comme **origine** des **dates**, une **particule** de **charge q** et de **masse m** entre dans un **champ magnétique uniforme** son **vecteur $\vec{B}$** avec une **vitesse initiale $\vec{v}_0$** tel que $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$.



Système étudié : {la **particule**}

L'inventaire des forces : son **poids $\vec{P}$**, la **force magnétique $\vec{F}$** (on **$\vec{P}$ néglige** devant **$\vec{F}$**).

Le **mouvement** est étudié dans le **repère $\mathcal{R}$** $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ lié à la **terre** considérée comme **galiléen**.

En appliquant la **deuxième loi** de **Newton**, on trouve : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = m.\vec{a}_G$

Conclusions :

- C-à-d le **vecteur accélération $\vec{a}_G$** est **perpendiculaire** à $\vec{v}$ et à $\vec{B}$ alors $a_z = 0$ d'où $v_z(t) = v_{0\,z} = 0$ donc $z(t) = z_0 = 0$.
- Puisque $z = 0$ donc **le mouvement de la particule dans un champ magnétique uniforme est un mouvement plan.**
- Puisque la **particule** est soumise à la **force magnétique uniquement**, donc le **mouvement** de la **particule** est **uniforme**, c-à-d **sa vitesse** dans un **champ magnétique reste constante** d'où $v(t) = v_0 = cte$.

Les conditions initiales à $t = 0$:

$$\overrightarrow{OG_0}\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \text{ et } \vec{v}_0 \begin{cases} v_{0_x} = 0 \\ v_{0_y} = v_0 \\ v_{0_z} = 0 \end{cases}$$

- **L'expression du vecteur accélération dans la base Frenet** est :

$$\vec{a}_G = \frac{dv}{dt}\vec{u} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$ avec ρ **le rayon de courbure de la trajectoire**.

- Puisque $v(t) = cte$ donc $\frac{dv}{dt} = 0$ alors $\vec{a} = \frac{v_0^2}{\rho}\vec{n} = \frac{q}{m}\vec{v} \wedge \vec{B}$

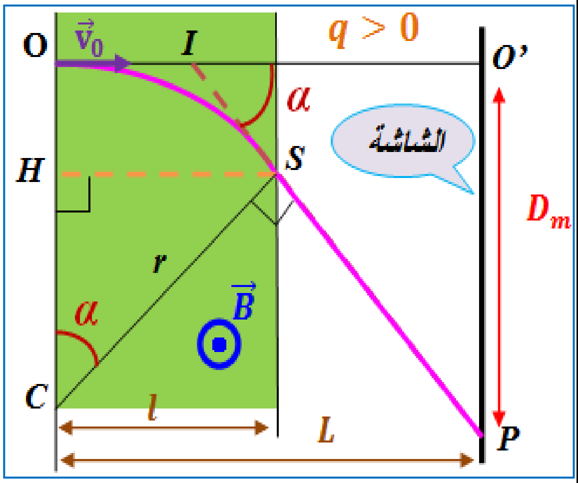
d'où $\frac{v_0^2}{\rho}\vec{n} = \frac{|q|v_0 B \sin\alpha}{m}\vec{n}$ et puisque $\vec{v} \perp \vec{B}$ d'où $\alpha = \frac{\pi}{2}$ donc $\sin\alpha = 1$

alors $\frac{v_0^2}{\rho} = \frac{|q|v_0 B}{m}$ d'où $\rho = \frac{mv_0}{|q|B} = cte$ donc **la trajectoire de la particule est circulaire** car le **rayon** de **courbure** de la **trajectoire** est **constant**.

Le mouvement d'une particule chargée de masse m et sa charge q entrant dans un champ magnétique uniforme avec une vitesse $\vec{v}_0$ perpendiculaire à $\vec{B}$ vecteur de ce champ est circulaire uniforme, sa trajectoire est dans le plan perpendiculaire à $\vec{B}$ et de rayon : $r = \frac{mv_0}{|q|B}$

La déviation magnétique :

Un **faisceau** de **particules identique** de **charge** q et de **masse** m, entre en un **point** O avec une **vitesse initiale** $\vec{v}_0$ dans un **champ magnétique uniforme** $\vec{B}$ **orthogonale** à $\vec{v}_0$. La **trajectoire** des **particules**, dans le **champ magnétique**, est **circulaire** et de **rayon** $r = \frac{mv_0}{|q|B}$.



A la **sortie** du **champ**, les **particules** devient **mécaniquement pseudo-isolées** (on **néglige** le **poids** de la **particule**) son **mouvement** est alors **rectiligne uniforme** et sa **trajectoire** est **tangente** à l'**arc** $\widehat{OS}$ au **point** S.

Les **particules** sont **reçues** en P sur un **écran perpendiculaire** à OO' et placé d'une **distance** L par rapport au **point** O.

La **distance** $D_m = O'P$ représente **la déviation magnétique**, tandis que **la déviation angulaire** est donnée par l'**angle** $\alpha = (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CS})$.

Les **deux angles** $(\widehat{OCS})$ et $(\widehat{PIO'})$ sont **égaux**. Alors $\tan\alpha = \frac{O'P}{IO'} = \frac{D_m}{L-OI}$ et $\sin\alpha = \frac{l}{r}$.

Pour les **appareils** utilisés, α **est petit** d'où $\tan\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha$ (α en **rad**) et d'autre part $l \ll L$ d'où $L - OI \approx L$ alors $\tan\alpha = \frac{D_m}{L}$.

Donc $\frac{l}{r} = \frac{D_m}{L}$ alors $D_m = L\frac{l}{r}$ puisque $r = \frac{mv_0}{|q|B}$ donc $D_m = \frac{L.l.|q|}{mv_0}B$.

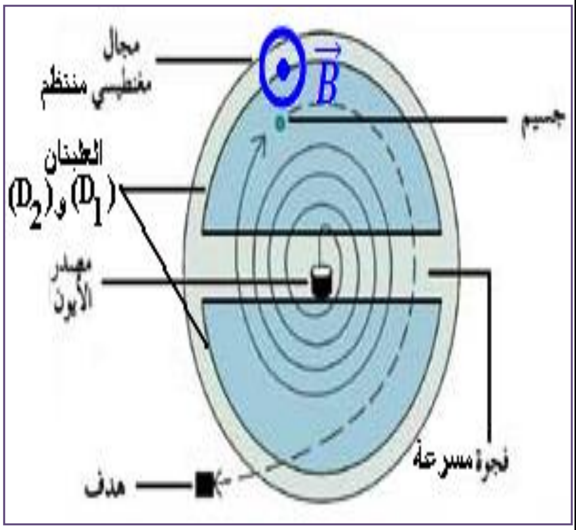
La déviation magnétique D_m, dans ces conditions, est proportionnelle avec l'intensité du champ magnétique B tel que $D_m = \frac{L.l.|q|}{mv_0}B$.

La déviation magnétique est exploitée dans la plupart des tubes cathodiques : télévision, écrans de l'ordinateur, les oscilloscope moderne….

3– Applications :

3-1- Cyclotron :

Le cyclotron est un accélérateur de particules chargées (inventé par **Ernest Lawrence** en **1930**). Il comporte **deux électrodes** en forme de **deux demi-cylindres** (D_1) et (D_2) **creux** de **petite hauteur**, les **deux baignent verticalement** dans un **champ magnétique** de **vecteur** $\vec{B}$. Un **champ électrique** est créé entre les **deux demi-cylindres** à l'aide d'une **tension alternative** U.

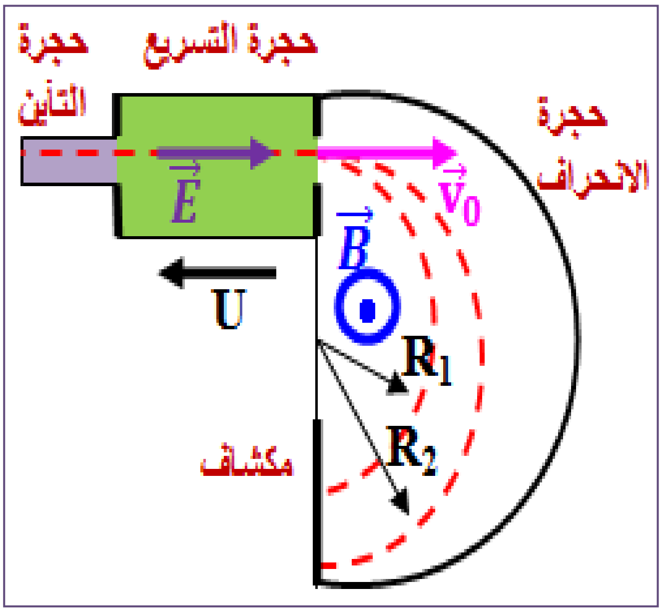


La **période** T de la **tension** U est égale à la **période** du **mouvement circulaire** des **particules** dans le **champ magnétique**.

A l'**instant** où le **champ électrique** est **maximal**, la **source** envoie les **particules chargées** entre les **deux demi-cylindre**. Le **champ** $\vec{E}$ **accélère** les **particules** vers (D_1) tel qu'elles réalisent un **demi-tour** pendant la **durée** $\frac{T}{2}$, ne dépend pas de la **vitesse** des **particules** $\left(\frac{T}{2} = \frac{\pi m}{|q|B}\right)$.

Et au **moment** où il **sort** de la **boîte** (D_1) , la **direction** de $\vec{E}$ **change** et le **champ** $\vec{E}$ **accélère** les **particules** vers la **boîte** (D_2) tel qu'elles réalisent un **demi-tour** de **rayon** plus **grand** pendant la **même période** $\frac{T}{2}$. Ainsi, après chaque **passage** d'une **boîte** à une autre, sa **vitesse** et son **rayon** $R = \frac{m.v}{|q|.B}$ **augmentent** d'où son **énergie cinétique augmente**, jusqu'à ce que le **rayon** de **trajectoire** devient égal au **rayon** de **deux demi-cylindre**, les **particules** atteint son **but** .

3-2- Spectrographe de masse :



Le **spectrographe** de **masse** est un **appareil** pouvant être utilisé pour **séparer** des **ions** de **charges** ou de **masses différentes**, utilisant un **champ** d'**électrons** et un **champ magnétique**. Il est **formé** de :

- **Chambre d'ionisation :** on y produit des **ions** de **même charge** q mais de **masses différentes**.
- **Chambre d'accélération :** à travers une **première fente**, les **ions** pénètrent dans cette **chambre** avec une **vitesse négligeable**. Ils sont **accélérés** par un **champ électrique uniforme** $\vec{E}$ créé par une **tension** U et **sortent** avec une **vitesse** $v_0 = \sqrt{\frac{2|q|U}{m}}$.
- **Chambre de déviation :** les **ions** sont **déviés** par un **champ magnétique uniforme** de **vecteur** $\vec{B}$ **perpendiculaire** à $\vec{v}_0$ et les **ions** suit des **trajectoires circulaires** dont son **rayon** est $R = \frac{m.v_0}{|q|.B} = \sqrt{\frac{2Um}{|q|B^2}}$, et selon la **valeur** de $\frac{m}{|q|}$, on obtient des **trajectoires circulaires différentes** pour des **ions différents** .
- **Détecteur :** peut être une **plaque photographique** ou un **compteur électronique**. Son **rôle** est de **capter** les **ions**. On peut ainsi **mesurer** le **rayon** R et déduire le **rapport** $\frac{m}{|q|}$ qui caractérise chaque **particule** et par **conséquent** on détermine la **nature** de cette **particule** .