Quatrième Partie : La mécanique Unité 5 4 H	Relation quantitative entre la somme des moments et l'accélération angulaire	السلام عليكم ورحمة الله وبركاته 2^{éme} Bac Sciences Physique (PC / SM)

Relation quantitative entre la somme des moments et l'accélération angulaire

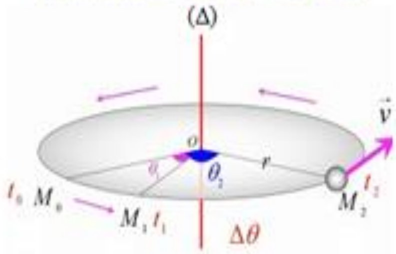
I – Rappel :

1– Abscisse angulaire - abscisse curviligne :

La **position** d'un **point** d'un **corps solide** en **rotation** autour d'un **axe fixe (Δ)**, peut être **repérée** par son **abscisse angulaire θ**, ou son **abscisse curviligne s** .

La **relation** entre θ et s est : $s = R.\theta$.

2– Vitesse angulaire - vitesse linéaire :

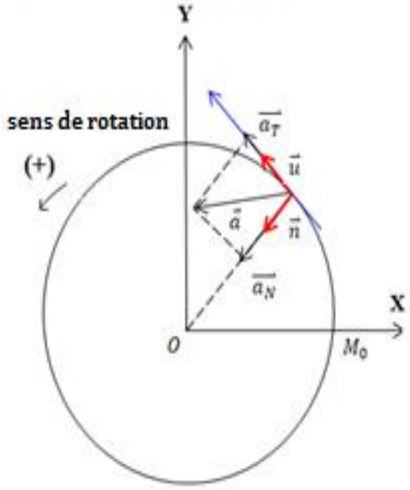


Tous les **points** d'un **corps solide** ont la **même vitesse angulaire ω_i** et leurs **vitesses linéaires V** **croient** en s'**éloignant** de l'**axe** de **rotation (Δ)**, $V = R.\omega$.

Pour déterminer la **vitesse angulaire ω_i**, on utilise la **méthode d'encadrement** $\omega_i = \frac{\theta_{i+1}-\theta_{i-1}}{t_{i+1}-t_{i-1}}$, avec t_{i-1} et t_{i+1} des **instants très rapprochés** qui encadre l'**instant t_i** .

II – Vitesse angulaire - accélération angulaire :

1– Vitesse angulaire :



Le **vecteur vitesse linéaire $\vec{V}$** d'un **corps solide** en **mouvement** de **translation** s'**exprime** par $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$.

Par analogie, l'**expression** de la **vitesse angulaire instantanée** est : $\omega = \frac{d\theta}{dt}$.

Dans le **cas** d'un **mouvement circulaire uniforme**, la **vitesse angulaire instantanée** égale à la **vitesse angulaire moyenne ω_m** c-à-d : $\omega_m = \omega = \frac{d\theta}{dt}$.

2– Accélération angulaire :

Le **vecteur accélération** d'un **corps solide** en **mouvement** de **translation** s'**exprime** par : $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$.

Par analogie, l'**expression** de l'**accélération angulaire** est : $\ddot{\theta} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$.

On définit l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ du mouvement d'un corps solide en rotation autour d'un axe fixe (Δ), à tout instant par la dérivée première par rapport au temps de la vitesse angulaire ω : $\ddot{\theta} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

En **utilisant** les **équations aux dimensions**, on a : $[\ddot{\theta}] = T^{-2}$, $[d\theta] = 1$, $[dt] = T$ ce qui montre l'**homogénéité** de la **relation précédente**.

3– Accélération tangentielle a_T et accélération normale a_N :

Les **coordonnées** du **vecteur accélération** dans la **base Freinet** s'écrit : $a_T = \frac{dV}{dt}$ et $a_N = \frac{V^2}{\rho}$. On désigne ρ par le **rayon** de **courbure**, son **unité** est le **mètre** (m).

Et dans le **cas** d'un **mouvement circulaire :** $\rho = r$.

Sachant que $V = R.\omega = R.\dot{\theta}$, les **expressions** de a_T et a_N s'écrivent : $a_T = R.\ddot{\theta}$ et $a_N = R.\dot{\theta}^2$.

En **utilisant** les **équations** aux **dimensions**, on a : $[a_T] = [a_N] = \frac{L}{T^2}$ et $[R.\ddot{\theta}] = L.T^{-2}$ ce qui montre l'**homogénéité** de la **relation précédente** .

III – Relation fondamentale de la dynamique (RFD) dans le cas de la rotation autour d'un axe fixe (Δ) :

1– Enoncé de la loi :

Dans un repère lié à la terre, la somme des moments des forces appliquées à un corps solide en rotation autour d'un axe fixe (Δ), est égale à chaque instant, au produit du moment d'inertie J_Δ et de l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ du corps solide à cet instant.

$$\sum M_\Delta(\vec{F_i}) = J_\Delta.\ddot{\theta}$$

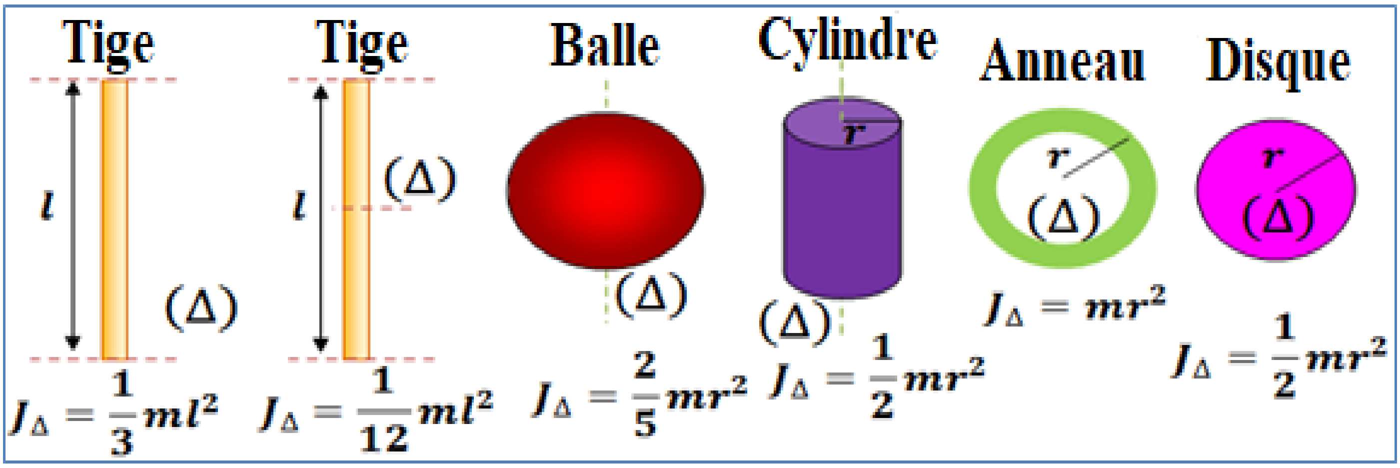
En **utilisant** les **équations** aux **dimensions**, on a : $[J_\Delta] = M.L^2$, $[\ddot{\theta}] = T^{-2}$, ce qui montre l'**homogénéité** de la **relation précédente tel que :**

$[M_\Delta(\vec{F_i})] = [F.d] = M.L.T^{-2}.L = M.T^{-2}.L^2$.

Remarque :

- Si $\sum M_\Delta(\vec{F_i}) = 0$, alors $\ddot{\theta} = 0$, donc le **mouvement** est une **rotation uniforme** autour de l'**axe (Δ)**.
- Si $\sum M_\Delta(\vec{F_i}) = cte$, alors $\ddot{\theta} = cte$, donc le **mouvement** est une **rotation uniformément variée** autour de l'**axe (Δ)**.

Le **mouvement** est une **rotation uniformément variée** est **caractérisé** par les **équations** : $\ddot{\theta} = cte$; $\dot{\theta} = \ddot{\theta}.t + \dot{\theta}_0$; $\theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}.t^2 + \dot{\theta}_0.t + \theta_0$.



2– Rôle du moment d'inertie du corps lors de sa rotation :

D'après l'**expression** de la **Relation Fondamentale** de la **Dynamique** (RFD)

$\sum M_\Delta(\vec{F_i}) = J_\Delta.\ddot{\theta}$, on remarque que :

- Pour une **valeur** de $\sum M_\Delta(\vec{F_i})$, l'**accélération** $\ddot{\theta}$ dépend de la **valeur** de J_Δ.
- L'**accélération angulaire** $\ddot{\theta}$ **augmente**, si J_Δ **diminue** et $\ddot{\theta}$ **diminue**, si J_Δ **augmente**. Donc la **valeur** de J_Δ détermine l'**importance** de l'**effet dynamique** de la **somme des moments des forces appliquées** au **corps solide**.

IV – Etude du mouvement d'un système mécanique en translation et en rotation autour d'un axe fixe (Δ) :

- Pour réaliser l'**étude** du **mouvement** d'un **système mécanique** composé de **solides**, en **mouvement** de **translation** et de **rotation** autour d'un **axe fixe**, on suit les **étapes suivantes** :

- Déterminer les **corps** en **mouvement** de **translation**.
- Déterminer les **corps** en **mouvement** de **rotation**.
- Appliquer le **Principe Fondamental de la Dynamique** (PFD) à **chaque corps** en **translation** : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\overrightarrow{a_G}$.
- Projeter le **principe** précédent sur les **axes** du **repère** d'**étude**.
- Appliquer la **Relation Fondamentale** de la **Dynamique** (RFD) à **chaque corps** en **rotation** : $\sum M_\Delta(\vec{F_i}) = J_\Delta.\ddot{\theta}$, en choisissant un **sens positif** de **rotation**.

- Pour faire la **liaison** entre les **corps** en **translation** et le **corps** en **rotation**, on utilise des **résultats** telle que :

- **Fil inextensible** qui ne **glisse** pas sur la **gorge** de la **poulie** : $a = r.\ddot{\theta}$ avec :
r : **rayon** de la **poulie**. a : **accélération linéaire** du **corps** en **translation**.
$\ddot{\theta}$: **accélération angulaire** du **corps** en **rotation**.
- **Fil** de **masse négligeable**, qui **signifie** une **tension constante** le **long** de tous les **points** du **fil** qui lie le **corps** en **translation** au **corps** en **rotation** : $T_1 = T_2$.
- Si le **moment d'inertie** du **corps** en **rotation** est **négligeable**, où le **mouvement** est une **rotation uniforme**, alors la **tension** du **fil** est **constante** en tous ses **points**.