Troisième Partie : Electricité
Unité 1
6 H / 7 H

Le Dipôle RC

RC ثنائي القطب

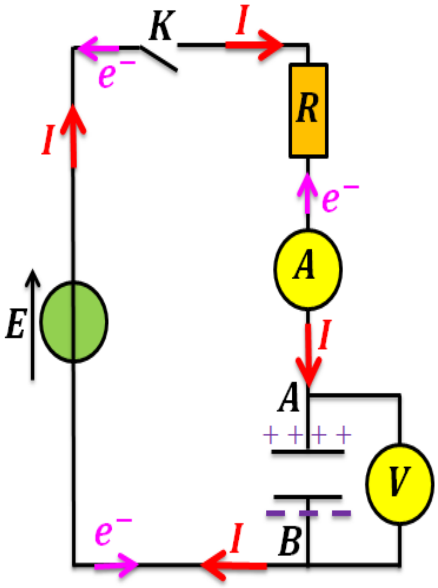
بسم الله الرحمن الرحيم
السلام عليكم ورحمة الله وبركاته

2ème Bac Sciences Physique

I – Condensateur :

En **1745** et dans la **ville** de **Leyde**, aux **Pays-Bas**, les deux **physiciens Von Kleist et Petrus Van Musschenbrœk** découvrent **le condensateur**, connu sous le **nom** de **bouteille de Leyde**, est un dispositif capable d'**accumuler** des **charges d'électricité statique**, mais le **principe** de fonctionnement de ce dispositif n'a été découvert qu'en **1782** par le **physicien italien Volta**.

1– Définition :



On réalise le **montage expérimental** suivant :

a- Lorsqu'on **ferme** l'**interrupteur**, comment la **tension** aux **bornes** de **condensateur** et l'**intensité** du **courant** traversant le **circuit** varient-t-elles ?

La **valeur** de la **tension** aux **bornes** de **condensateur** augmente jusqu'à atteindre une **valeur stable** égale à E, et l'**intensité** du **courant électrique démunie** jusqu'à être **nulle**. On dit que le **condensateur** lors de sa **charge complète** agit comme un **interrupteur ouvert**.

b- Représenter, sur le **montage**, le **sens** du **courant électrique** et le **sens** de **déplacement** des **électrons**.

Voir la **figure**.

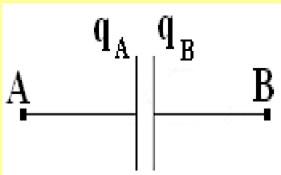
c- Déduire le **signe** de q_A et de q_B les **charges** respectives des **armatures** A et B du **condensateur**.

Lorsqu'on **ferme** l'**interrupteur**, les **électrons** se déplacent de l'**armature** A vers l'**armature** B . Et puisque les **électrons** ne pouvent pas traverser l'**isolant diélectrique**, ils s'**accumulent** sur l'**armature** B qui portera une **charge** q_B **négative** ($q_B < 0$), mais l'**armature** A portera une **charge positive** ($q_A > 0$).

d- Sachant que la **charge électrique se conserve**, déduire à chaque **instant** la relation entre les **deux charges** q_A et q_B.

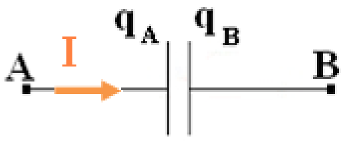
Comme la **charge électrique se conserve**, on déduit que $q_A + q_B = 0$ ainsi $q_A = -q_B$.

Le **condensateur** est un **dipôle** constitué de **deux plaques conductrices**, appelés **armatures**, séparés par **un isolant diélectrique**.
La charge d'un condensateur ou **la quantité d'électricité** q est la **charge** de l'**armature positive** du **condensateur**, exprimée en **Coulomb** C, le **symbole** du **condensateur** est :



Soit q_A la **charge** de l'**armature** A (**chargé positivement**) et q_B la **charge** de l'**armature** B (**chargé négativement**), de sorte qu'à chaque **instant** les **deux charges** q_A et q_B vérifient la **relation** $q_A = -q_B = q$.

2– Relation entre la charge et l'intensité de courant :



La **convention** d'**orientation** du **courant électrique** d'un **condensateur** est :

On choisit le **sens positif** de l'**intensité** du **courant** lorsqu'il **entre** par l'**armature** A. Ainsi, lorsque le **courant** passe dans le **sens choisi** $(i > 0)$ et lorsqu'il passe dans le **sens opposé** $(i < 0)$.

L'intensité de courant électrique est le débit des charges électriques et c'est la quantité d'électricité qui atteint l'armature du condensateur dans l'unité de temps.

- **Cas du courant continu :** $I = \frac{Q}{\Delta t}$
- **Cas du courant variable :** $i = \frac{dq}{dt}$

$$i = \frac{dq_A}{dt} = -\frac{dq_B}{dt}$$

Quand q_A **croît :** $\frac{dq_A}{dt} > 0$ **càd** $i > 0$

Quand q_A **décroît :** $\frac{dq_A}{dt} < 0$ **càd** $i < 0$

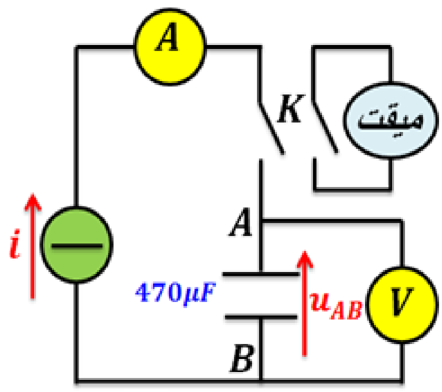
Algébrisation de l'intensité de courant électrique

3– Relation entre la charge et la tension :

On réalise le **montage électrique** suivant, où le **générateur idéal de courant** donne un **courant électrique** d'**intensité constante** et **réglable** $I_0 = 80\ \mu A$.

On **ferme** l'**interrupteur** et on **déclenche** instantanément le **chronomètre**, puis on **mesure** la **tension** u_{AB} aux **bornes** du **condensateur** à chaque **cinq seconde**. Et on écrit les **résultats** dans le **tableau** :

$t(s)$	0	5	10	15	20	25	30	35	40
$u_{AB}(V)$	0	0,85	1,7	2,55	3,4	4,25	5,11	5,96	6,81
$q_A(\mu C)$	0	400	800	1200	1600	2000	2400	2800	3200



Le montage expérimental

a- Quelle est la **valeur** de la **quantité d'électricité** $q_A(t_0)$ portée par le **condensateur** ?

A l'**instant** $t = 0$, le **condensateur** est **déchargé** c-à-d $q_A = 0$.

b- Monter qu'à l'**instant** t le **condensateur** acquiert la **charge** $q_A(t) = I_0.t$.

On a $i = \frac{q_A}{dt}$ donc $I_0 = \frac{dq_A}{dt} = \frac{q_A(t)-q_A(0)}{t-0} = \frac{q_A(t)}{t}$

alors $q_A(t) = I_0.t$.

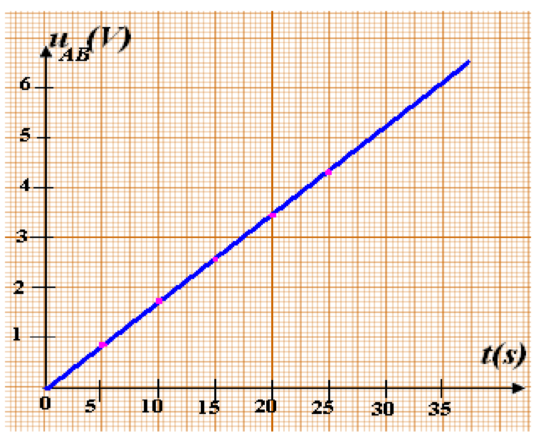
c- Compléter le tableau ci-dessus .

Voir le **tableau** .

d- Tracer la **courbe** $u_{AB} = f(t)$ et déterminer α le **coefficient directeur** de la **courbe**.

Voir la **courbe**. La **courbe** est une **fonction linéaire** écrite sous la forme $u_{AB} = \alpha.t$

Alors $\alpha = \frac{u_{AB}}{t} = \frac{0,85}{5} = 0,17\ V.s^{-1}$.



e- Déduire l'**expression** de q_A en fonction de I_0 et α et u_{AB}.

On a $q_A(t) = I_0.t$ et $u_{AB} = \alpha.t$ Donc $q_A(t) = \frac{I_0.u_{AB}}{\alpha}$.

f- Le **rapport** $\frac{I_0}{\alpha}$ est appelé **capacité du condensateur** et on la note C. Calculer la **valeur** de C et la vérifie avec la **valeur** indiquée par le **fabricant**.

On a $q_A(t) = C.u_{AB}$ Donc $C_{exp} = \frac{I_0}{\alpha} = \frac{80.10^{-6}}{0,17} = 470,6\ \mu F$

on remarque que $C_{exp} = C_{th}$.

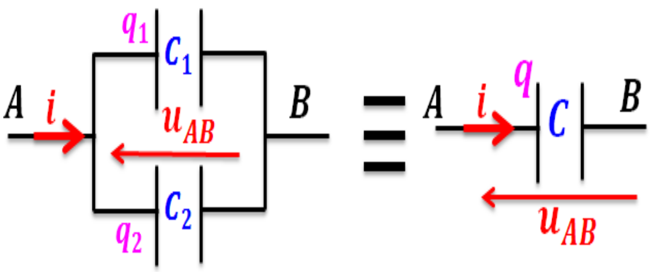
La charge $q_A(t)$ du condensateur est proportionnelle avec la tension $u_{AB}(t)$ entre ses bornes, le coefficient de proportionnalité est appelé capacité du condensateur, on la note C, son unité en (S.I) est Farad F tel que : $q_A(t) = C.u_{AB}$
La capacité du condensateur est une grandeur positive, elle distingue le condensateur et elle ne dépend pas de la tension appliquée entre ses bornes ni de la durée de la charge.

Sous-multiple de Farad
millifarad $1mF = 10^{-3}F$
microfarad $1\mu F = 10^{-6}F$
nanofarad $1nF = 10^{-9}F$
picofarad $1pF = 10^{-12}F$

II – Association des condensateurs :

1– Association en parallèle :

On applique une **tension** u_{AB} aux **bornes** de **deux condensateurs** C_1 et C_2 branchés en parallèle.



Soit q_1 la **charge** du **condensateur** de **capacité** C_1 et q_2 la **charge** du **condensateur** de **capacité** C_2 et q la **charge totale** des **deux condensateurs** ensemble.
On applique la **loi des nœuds** au **nœud** A, on a $q = q_1 + q_2 = C_1.u_{AB} + C_2.u_{AB} = (C_1 + C_2).u_{AB}$ et d'autre part on a $q = C.u_{AB}$ alors $C = C_1 + C_2$.

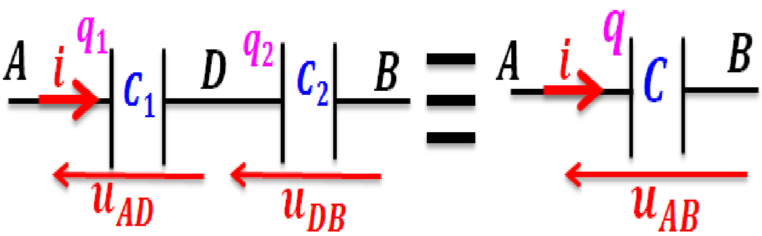
En général, la capacité du condensateur équivalente à un ensemble de condensateurs de capacités C_1 et C_2 et ... et C_n branchés en parallèle est :

$$C = \sum C_i = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

L'association en parallèle des condensateurs permet d'obtenir un condensateur de capacité plus grande pouvant emmagasiner une charge plus grande sous une tension petite. Et, par l'application d'une tension petite, on peut obtenir une charge électrique grande peut ne pas être fournie par chaque condensateur séparément.

2– Association en série :

On branche **en série**, **deux condensateurs** C_1 et C_2 , traversés par le **même courant électrique**, **chargés** par des **deux charges** égales $q = q_1 = q_2$



On a $u_{AD} = \frac{q_1}{C_1}$ et $u_{DB} = \frac{q_2}{C_2}$ et $u_{AB} = \frac{q}{C}$ on applique la **loi d'additivité des tensions** :
$u_{AB} = u_{AD} + u_{DB}$ donc $\frac{q}{C} = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2}$ alors $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$.

En général, la capacité du condensateur équivalente à un ensemble de condensateurs de capacités C_1 et C_2 et ... et C_n branchés en série est :

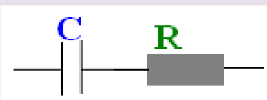
$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$

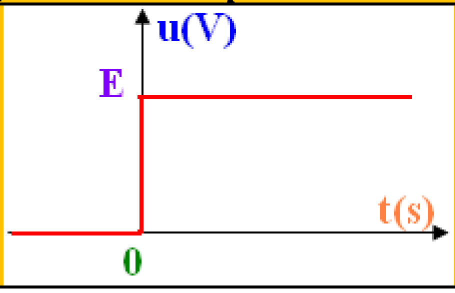
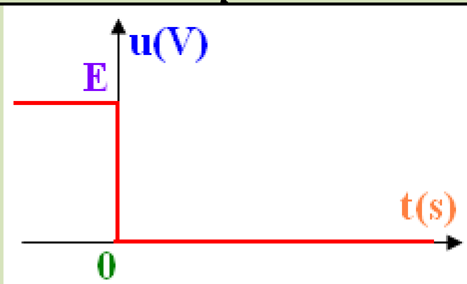
L'association en série des condensateurs permet d'obtenir un condensateur de capacité plus petite pouvant supporter une tension plus grande qui ne peut pas être supporter par chaque condenseur s'il est utilisé séparément.

III – Réponse d'un dipôle RC à un échelon de tension :

1– Définitions :

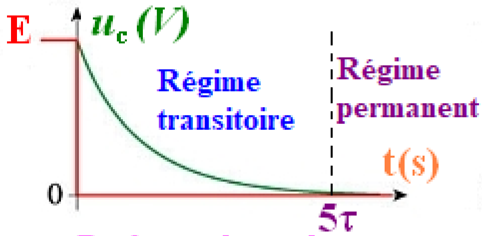
Le dipôle RC est l'association en série d'un conducteur Ohmique de résistance R et d'un condensateur de Capacité C.



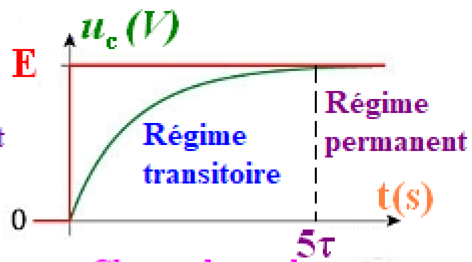
Un échelon de tension est un signal électrique u et on distingue entre :	
Echelon montant de tension définit par :	**Echelon descendant de tension définit par :**
$\begin{cases} on\ a\ \ u = 0 & pour\ \ t < 0 \\ on\ a\ \ u = E & pour\ \ t \geq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} on\ a\ \ u = E & pour\ \ t < 0 \\ on\ a\ \ u = 0 & pour\ \ t \geq 0 \end{cases}$
	

2– Etude expérimentale d'une réponse d'un dipôle RC :

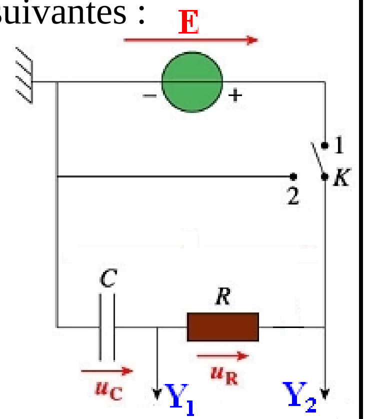
En réalisant le **montage expérimental** suivant et lors de la **visualisation** de la **tension u_C** aux **bornes** du **condensateur**, on obtient les **courbes** suivantes :



Décharge du condensateur



Charge du condensateur

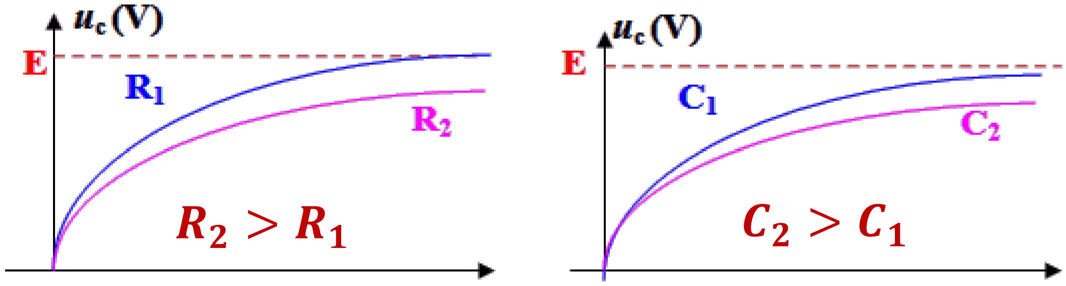


On remarque :

- La **tension u_C** aux **bornes** du **condensateur** est **continue**.
- La **tension u_C** aux **bornes** du **condensateur** **croît** pendant la **charge** et **décroît** pendant la **décharge**.
- On **distingue** entre deux **régimes** :

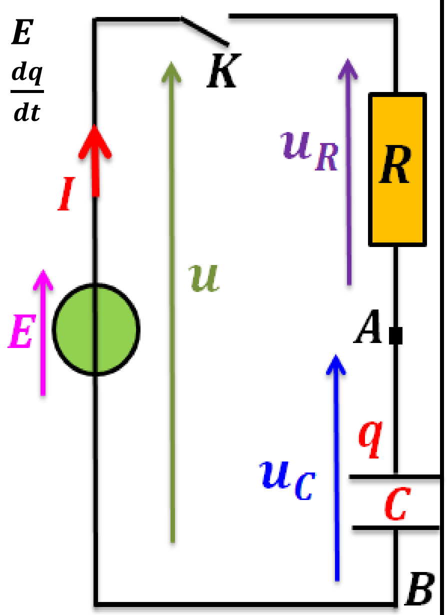
- **Régime transitoire :** la **tension** u_C pendant lequel **croît** ou **décroît** et on l'obtient lorsque $t < 5\,\tau$.
- **Régime permanent :** on l'obtient lorsque $t > 5\,\tau$ pendant lequel la **tension** u_C **reste constante** et a pour **valeur** égale E lors de la **charge** du **condensateur** et **nulle** lors de sa **décharge**.

- **La durée de charge ou de décharge** du **condensateur** **augmente** lorsque **la valeur de** R **ou** C **augmente**. (Voir la figure suivante)
- **L'amplitude de l'échelon de tension** n'**influence** pas sur **la constante de temps** τ.



3– Réponse d'un dipôle RC à un échelon montant : charge du condensateur :

3-1- Equation différentielle :



On a selon la **loi d'additivité des tensions** : $u = u_R + u_C = E$

Et selon la **loi d'Ohm** : $u_R = R.i$ et on a $q = C.u_C$ et $i = \frac{dq}{dt}$

Donc $i = \frac{d(C.u_C)}{dt} = C.\frac{du_C}{dt}$ alors $RC.\frac{du_C}{dt} + u_C = E$.

L'équation différentielle vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur pendant sa charge est :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{RC} = \frac{E}{RC}$$

Et puisque $u_C = \frac{q}{C}$ on trouve l'équation différentielle vérifiée par la charge q pendant la charge du condensateur est : $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{E}{R}$

3-2- Solution de l'équation différentielle :

On admet que la **solution** de l'**équation différentielle** $RC.\frac{du_C}{dt} + u_C = E$ s'écrit sous la forme : $u_C(t) = Ae^{-\alpha t} + B$ avec A et B et α des **constantes**.

On a $u_C(t) = Ae^{-\alpha t} + B$ alors $\frac{du_C}{dt} = -\alpha.A.e^{-\alpha t}$ et on remplace ces **expressions** dans l'**équation différentielle** : $-RC.\alpha.A.e^{-\alpha t} + Ae^{-\alpha t} + B = E$

Donc $(1 - RC.\alpha).A.e^{-\alpha t} = E - B$

On sait que $A \neq 0$ et pour que **cette relation soit vérifiée quelque soit t** il faut que :

$\begin{cases} 1 - RC\alpha = 0 \\ E - B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{RC} \\ B = E \end{cases}$ Donc $u_C(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}} + E$.

Au début, le **condensateur** est **déchargé** et, puisque la **fonction** de **tension** u_C est **continue** d'où $u_C(t_0) = 0$.

Donc $u_C(t_0) = A + E = 0$ ainsi $A = -E$ alors $u_C(t) = -Ee^{-\frac{t}{RC}} + E$.

On pose $\tau = R.C$

L'expression de la tension aux bornes du condensateur est : $u_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

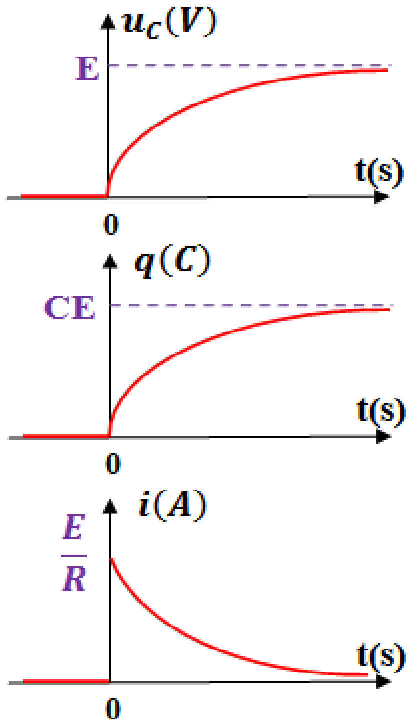
Puisque $q(t) = C.u_C(t)$ donc l'expression de la charge q est : $q(t) = CE\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

Puisque $i = \frac{dq}{dt} = C.\frac{du_C}{dt}$ donc l'expression de l'intensité du courant traversant le circuit RC est :

$$i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

On remarque que la tension $u_C(t)$ et la charge $q(t)$ sont continués à l'instant $t = 0$.

On remarque que l'intensité du courant $i(t)$ est discontinue à l'instant $t = 0$.



3-3- Constante de temps :

On pose $\tau = R.C$. On a pour un **conducteur ohmique** : $u = R.i$ d'où $[R] = \frac{[U]}{[I]}$

et pour un **condensateur** : $i = C.\frac{du}{dt}$ d'où $[C] = \frac{[I].[t]}{[U]}$

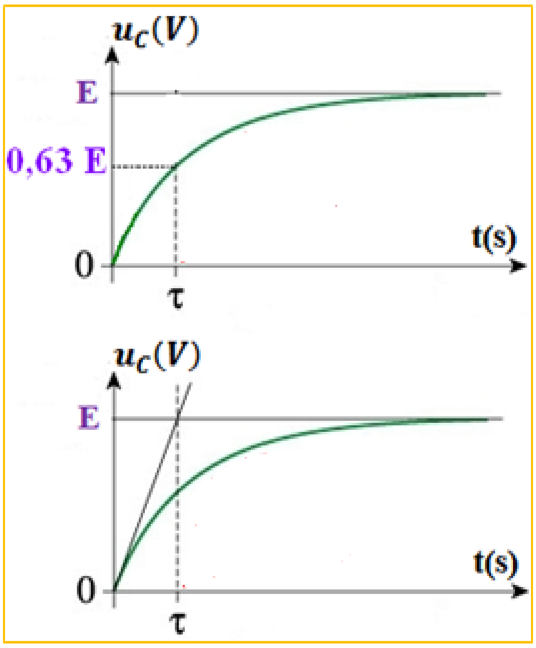
Donc $[\tau] = [R].[C] = \frac{[U]}{[I]} \times \frac{[I].[t]}{[U]} = [t]$ alors $[\tau] = [t]$ ainsi la **constante τ** est **homogène** à un **temps**.

On appelle la grandeur $\tau = R.C$ constante de temps d'un dipôle RC, car elle est homogène à un temps, son unité dans (S.I) est seconde s.

Détermination de la constante de temps τ :

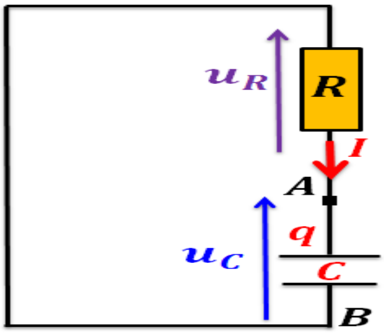
- En connaissant R et C, et on calcule $\tau = R.C$.
- On a $u_C(\tau) = E\left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}}\right)$

  Donc $u_C(\tau) = E(1 - e^{-1}) = 0,63\,E$ tel que τ la **durée nécessaire** pour que la **tension u_C** atteigne **63%** de sa **valeur finale E** .
- **τ est l'abscisse du point d'intersection de la tangente** de la **courbe $u_C = f(t)$** à l'**instant $t = 0$** avec l'**asymptote horizontale $u_C = E$**.



4– Réponse d'un dipôle RC à un échelon descendant : décharge du condensateur :

4-1- Equation différentielle :



Lorsqu'on **ferme** le circuit ci- contre à l'**instant** $t = 0$ le **condensateur est initialement chargé** c-à-d $u_C(0) = E$ et selon la **loi d'additivité des tensions** : $u = u_R + u_C = 0$

Et selon la **loi d'Ohm** on a $u_R = R.i$ et on sait que $q = C.u_C$

Donc $i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(C.u_C)}{dt} = C.\frac{du_C}{dt}$ alors $RC.\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$

On pose $\tau = R.C$ donc $\tau.\frac{du_C}{dt} + u_C = 0.$

L'équation différentielle vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur pendant sa décharge est : $\frac{du_C}{d} + \frac{u_C}{\tau} = 0$

Et puisque $u_C = \frac{q}{C}$ on trouve l' équation différentielle vérifiée par la charge q pendant la décharge du condensateur est : $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tau} = 0$

4-2- Solution de l'équation différentielle :

On admet que la **solution** de l'**équation différentielle** $\tau.\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$ s'écrit sous la forme : $u_C(t) = Ae^{-\alpha t} + B$ avec A et B et α des **constantes**.

On a $u_C(t) = Ae^{-\alpha t} + B$ alors $\frac{du_C}{dt} = -\alpha.A.e^{-\alpha t}$ et on remplace ces **expressions** dans l'**équation différentielle** : $-\tau.\alpha.A.e^{-\alpha t} + Ae^{-\alpha t} + B = 0$

Donc $(1 - \tau.\alpha).A.e^{-\alpha t} = -B$

On sait que $A \neq 0$ et pour que **cette relation soit vérifiée quelque soit t** il faut que :

$\begin{cases} 1 - \tau.\alpha = 0 \\ B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{\tau} \\ B = 0 \end{cases}$ Donc $u_C(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$.

Puisque la **fonction tension u_C** est **continue** d'où $u_C(t_0) = E$.

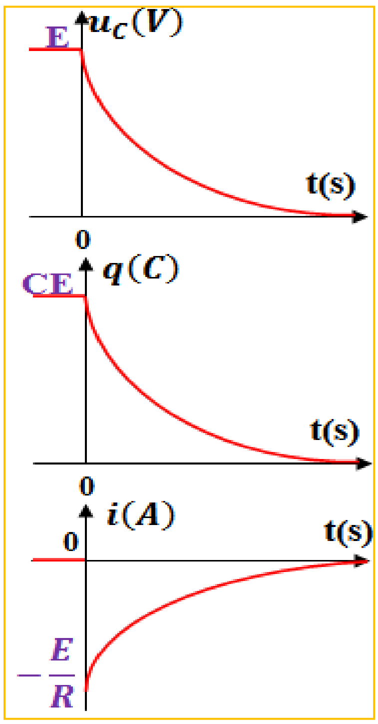
Donc $u_C(t_0) = A = E$ ainsi $A = E$ alors $u_C(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$.

L'expression de la tension aux bornes du condensateur est : $u_C(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$

Puisque $q(t) = C.u_C(t)$ donc l'expression de la charge q est : $q(t) = C.E.e^{-\frac{t}{\tau}}$

Puisque $i = \frac{dq}{dt} = C.\frac{du_C}{dt}$ donc l'expression de l'intensité du courant traversant le circuit RC est : $i(t) = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$

On remarque que la tension $u_C(t)$ et la charge $q(t)$ sont continués à l'instant $t = 0$. Et on remarque que l'intensité du courant $i(t)$ est discontinue à l'instant $t = 0$.

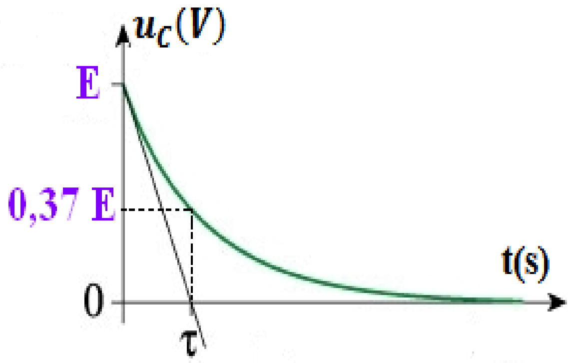


4-3- Constante de temps :

On appelle la grandeur $\tau = R.C$ constante de temps d'un dipôle RC, car elle est homogène à un temps, son unité dans (S.I) est seconde s.

Détermination de la constante de temps τ :

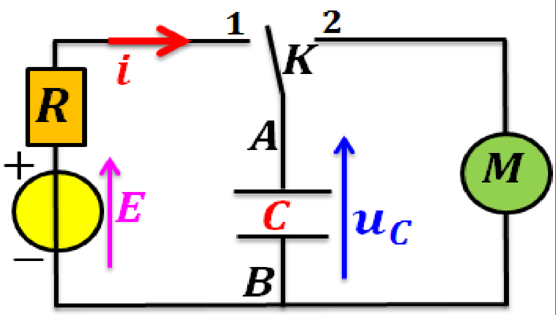
- En connaissant R et C, et on calcule $\tau = R.C$.
- On a $u_C(\tau) = Ee^{-\frac{\tau}{\tau}} = Ee^{-1} = 0,37\ E$ tel que τ la **durée nécessaire** pour que la **tension u_C** atteigne 37% de sa **valeur initiale**.
- τ est **l'abscisse du point d'intersection de la tangente** de la **courbe $u_C = f(t)$** à l'**instant $t = 0$** avec l'**axe** des **abscisses**.



IV – Energie emmagasinée dans un condensateur :

1– Mise en évidence :

On considère le **montage** utilisé ci-contre.



- Lorsqu'on **bascule** l'**interrupteur** en **position 1**, le **condensateur se charge et emmagasine une énergie électrique**.
- Lorsqu'on **bascule** l'**interrupteur** en **position 2**, le **condensateur fournit l'énergie au moteur électrique et ce dernier tourne**.
- **L'énergie emmagasinée** dans le **condensateur croît** lorsqu'on **augmente** la valeur de **la capacité** du **condensateur** ou **la force électromotrice** du **générateur**.

2– Expression de l'énergie emmagasinée par le condensateur :

La **puissance électrique** de **transfert d'énergie** au **condensateur** est :

$$\mathcal{P} = u_C.i = u_C.\frac{d(Cu_C)}{dt} = C.u_C.\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{2}C\frac{du_C^2}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2 + K\right)$$

On sait que $\mathcal{P} = \frac{d\xi}{dt}$ donc $\xi = \frac{1}{2}Cu_C^2 + K$ avec K **constante**.

A l'**instant $t = 0$** on a $u_C = 0$ et $\xi = 0$ donc $K = 0$

Alors $\xi = \frac{1}{2}C.u_C^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}q.u_C$.

Le **stockage** de l'**énergie** ou le **déstockage** de l'**énergie** d'un **condensateur** ne se fait pas en **même temps**, alors la **tension** aux **bornes** d'un **condensateur** est une **fonction continue** $u_C = \sqrt{\frac{2\ \xi}{C}}$.