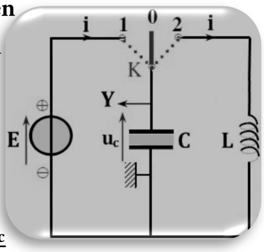
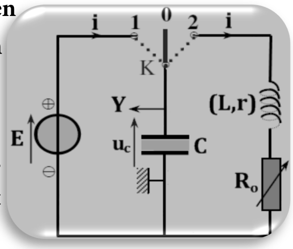
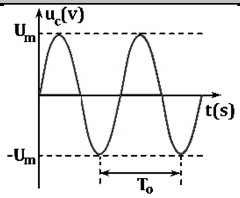
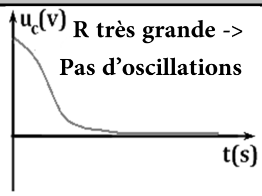
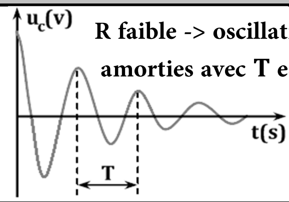
Oscillations libres dans un circuit RLC série

❶ Les circuits électriques oscillants:

Prof Abdelilah AZDAD

Le circuit LC	Le circuit RLC série
Après avoir chargé le condensateur (K en position 1), on bascule K sur la position 2 on obtient le circuit LC qui est un oscillateur électrique libre.  <u>L'équation différentielle</u> : en appliquant la loi d'additivité des tensions : $u_c + u_L = 0$ avec: $u_L = L\frac{di}{dt} = LC\frac{d^2u_c}{dt^2}$ finalement : $\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_c = 0$; la solution de l'équation différentielle s'exprime: $u_c = U_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_o}t + \varphi\right)$ avec U_m l'amplitude en (V) et φ la phase à $t = 0$ en (rad).	Après avoir chargé le condensateur (K en position 1), on bascule K sur la position 2 on obtient le circuit RLC série qui est un oscillateur électrique libre, avec $R = R_o + r$ est la résistance totale.  <u>L'équation différentielle</u> : en appliquant la loi d'additivité des tensions : $u_c + u_L + u_{R_o} = 0$ avec : $u_{R_o} = R_o.i = R_oC\frac{du_c}{dt}$ et : $u_L = L\frac{di}{dt} + r.i = LC\frac{d^2u_c}{dt^2} + rC\frac{du_c}{dt}$ finalement : $\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC}u_c = 0$

Les différents régimes des oscillations libres		
Régime périodique	**Régime apériodique**	**Régime pseudopériodique**
R nulle -> oscillations libres non amorties (sinusoïdales) avec T_o est la période propre en (s). $T_o = 2\pi\sqrt{LC}$ 	 R très grande -> Pas d'oscillations	 R faible -> oscillations libres amorties avec T est la pseudo-période $T \approx T_o$

La période propre T_o

☛ **Détermination de T_o:** Dans un premier temps en dérive deux fois l'expression de $u_c = U_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_o}t + \varphi\right)$

On a: $\frac{du_c}{dt} = -U_m.\frac{2\pi}{T_o}\sin\left(\frac{2\pi}{T_o}t + \varphi\right) \Leftrightarrow \frac{d^2u_c}{dt^2} = -U_m.\left(\frac{2\pi}{T_o}\right)^2\cos\left(\frac{2\pi}{T_o}t + \varphi\right) = -\left(\frac{2\pi}{T_o}\right)^2.u_c$

Dans un deuxième temps on reporte $\frac{d^2u_c}{dt^2}$ dans l'équation différentielle, donc $-\left(\frac{2\pi}{T_o}\right)^2.u_c + \frac{1}{LC}u_c = 0$

$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{LC} - \left(\frac{2\pi}{T_o}\right)^2\right].u_c = 0$; Dans un troisième temps on identifie T_o, $\forall u_c$ il faut que $\frac{1}{LC} - \left(\frac{2\pi}{T_o}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow T_o = 2\pi\sqrt{LC}$

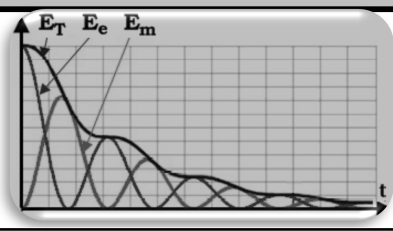
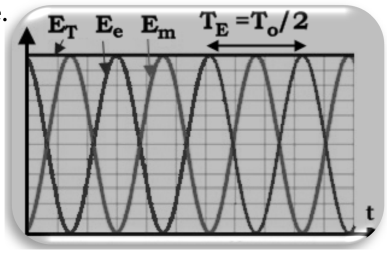
☛ **Dimension de T_o:** La dimension de T_o est celle de $\sqrt{LC}$ car 2π n'a pas de dimension. on a donc $u_L = L\frac{di}{dt}$ d'où $L = \frac{U.t}{I} \Leftrightarrow [L] = \frac{[U].[t]}{[I]}$; d'autre part : $i = C\frac{du_c}{dt}$ donc $C = \frac{I.t}{U} \Leftrightarrow [C] = \frac{[I].[t]}{[U]} \Leftrightarrow [LC] = \frac{[U].[t]}{[I]}\frac{[I].[t]}{[U]} = [t]^2 = T^2$

Finalement : $[T_o] = [LC]^{1/2} = T$; donc T_o à une dimension de temps.

❷ Aspect énergétique:

«L'énergie totale d'un circuit oscillant (LC et RLC) s'exprime : $E_T = E_e + E_m = \frac{1}{2}C.u_c^2 + \frac{1}{2}L.i^2$ »

☛ Il y a une transformation mutuelle d'énergie entre le condensateur et la bobine.

Le circuit RLC série
L'énergie totale d'un oscillateur électrique amortie n'est pas constante elle diminue au cours du temps par effet joule dans la résistance totale du circuit RLC. <u>Démonstration :</u> On a : $E_T = E_e + E_m == \frac{1}{2}C.u_c^2 + \frac{1}{2}L.i^2 \Leftrightarrow \frac{dE_T}{dt} = C.u_c\frac{du_c}{dt} + L.i\frac{di}{dt}$ $\Leftrightarrow \frac{dE_T}{dt} = u_c.i + L.i\frac{di}{dt} = i\left(u_c + L\frac{di}{dt}\right)$ et d'après la loi d'additivité des tensions on a : $u_c + L\frac{di}{dt} + R.i = 0$ donc : $u_c + L\frac{di}{dt} = -R.i$; finalement: $\frac{dE_T}{dt} = -R.i^2 \leq 0$ 
Le circuit LC
Conservation de l'énergie totale d'un oscillateur électrique non amortie est constante $E_T = cte$.  T_E c'est la période d'énergie <u>Démonstration :</u> On a : $E_T = \frac{1}{2}C.u_c^2 + \frac{1}{2}L.i^2 = \frac{1}{2}C.u_c^2 + \frac{1}{2}L\left(C\frac{du_c}{dt}\right)^2$ Avec : $u_c = U_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_o}t + \varphi\right)$ et $\frac{du_c}{dt} = -U_m.\frac{2\pi}{T_o}\sin\left(\frac{2\pi}{T_o}t + \varphi\right)$ Donc : $E_T = \frac{1}{2}C.U_m^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_o}t + \varphi\right) + \frac{1}{2}L.C^2.U_m^2.\frac{4\pi^2}{T_o{}^2}\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_o}t + \varphi\right)$ $\Leftrightarrow E_T = \frac{1}{2}C.U_m^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_o}t + \varphi\right) + \frac{1}{2}L.C^2.U_m^2.\frac{4\pi^2}{4\pi^2LC}\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_o}t + \varphi\right)$ $\Leftrightarrow E_T = \frac{1}{2}C.U_m^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_o}t + \varphi\right) + \frac{1}{2}C.U_m^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_o}t + \varphi\right) = \frac{1}{2}C.U_m^2\left[\overbrace{\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_o}t + \varphi\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_o}t + \varphi\right)}^{1}\right] = \frac{1}{2}C.U_m^2 = cte$

❸ Entretien des oscillations:

«pour entretenir les oscillations libres dans le circuit RLC, on ajoute au circuit un dispositif qui joue le rôle d'un générateur G qui débite un courant i proportionnel à la tension u_g tel que: $u_g = k.i$, afin de compenser l'énergie perdue par effet joule dans la résistance totale R et avoir des oscillations sinusoïdales. Pour cela il faut que : $k = R$»